

***Etude du produit des matrices de Lorentz sans
rotation :
Condition nécessaire et suffisante de commutativité .***

A • Guimier

Etude du produit des matrices de Lorentz sans rotation :

Commutativité

Théorème 1 :

Si le produit M de 2 matrices de Lorentz $\Lambda(\vec{\beta}')$ et $\Lambda(\vec{\beta}'')$ sans rotation de paramètre $\vec{\beta}' \neq \vec{0}$ et $\vec{\beta}'' \neq \vec{0}$ vérifient $M = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}')$ alors $\vec{\beta}'$ et $\vec{\beta}''$ sont colinéaires et réciproquement. Dans les 2 cas M est sans rotation.

Démonstration :

Commençons par la réciproque :

Posons $\vec{\beta} = \vec{\beta}'$ et $\lambda \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta}''$ avec $\lambda \neq 0$.

On rappelle les résultats suivants :

(1) (Voir par exemple J-M. Souriau. "Calcul Linéaire " • PUF 1964 • p.273)

Si A et B sont 2 matrices carrées de même format qui commutent alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(B) \cdot \exp(A).$$

(2) (J-M. Souriau. "Calcul Linéaire " • PUF 1964 • p.378)

Toute matrice M de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}, \epsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que : } {}^tXX = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbf{R}^3}.$$

$$\text{De plus } \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha) X & (Id_{\mathbf{R}^3} - 1 + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix}.$$

On rappelle que la décomposition d'une matrice inversible en un produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale est unique.

(3) dans <https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02965773/document> p.46

on démontre que $\vec{\beta} = th \alpha \vec{X}$, $\gamma = ch(\alpha)$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}}$,

d'où $\alpha = Argch(\gamma)$ et $\vec{X} = coth(Argch(\gamma)) \cdot \vec{\beta}$,
définissons $\varphi(\gamma) = Argch(\gamma) \cdot coth(Argch(\gamma))$.

$$\text{si on pose } A = \varphi(\gamma) \begin{bmatrix} 0 & \vec{\beta} \\ \vec{\beta} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \lambda \cdot \varphi(\gamma') \cdot \begin{bmatrix} 0 & \vec{\beta} \\ \vec{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}}}$.

Par unicité $\Lambda(\vec{\beta}) = \exp(A)$ et $\Lambda(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) = \exp(B)$.

On a bien $A \cdot B = B \cdot A$ donc $\Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Lambda(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) \cdot \Lambda(\vec{\beta})$.

De plus le produit est égal à $\exp(A + B)$ or la somme de 2 matrices symétriques est symétrique,

et l'exponentielle d'une matrice symétrique est symétrique donc le produit $\Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Lambda(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})$ est symétrique et

est donc une matrice de Lorentz sans rotation.

Réciproquement :

Considérons 2 matrices de Lorentz sans rotation :

$$\Lambda(\vec{\beta}') = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\gamma}'\vec{\beta}') \\ \vec{\gamma}'\vec{\beta}' & C' \end{bmatrix}, \Lambda(\vec{\beta}'') = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\gamma}''\vec{\beta}'') \\ \vec{\gamma}''\vec{\beta}'' & C'' \end{bmatrix} \text{ avec } \vec{\beta}' \neq \vec{0} \text{ et } \vec{\beta}'' \neq \vec{0},$$

et leur produit $M = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}') = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma}\vec{\beta})\Omega \\ \vec{\gamma}\vec{\beta} & C\Omega \end{bmatrix}$,

avec $C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')}$, $C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')}$ et $C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma}\vec{\beta}][{}^t\vec{\gamma}\vec{\beta}]}{(1 + \gamma)}$

alors

$$M = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \begin{bmatrix} \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1) & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' + \gamma' \vec{\beta}' C'' \\ \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' + \gamma'' C' \vec{\beta}'' & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma' \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)} \text{ et } \Omega = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C''),$$

avec $Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} = \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \gamma^2 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right)^{-1}$.

S'il y a commutativité, on a aussi : $\Omega = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' \vec{\beta}' + C'' C')$ et donc :

$$\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' = \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' \vec{\beta}' + C'' C'.$$

$$\begin{aligned}
C' \cdot C'' &= \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} \right) \cdot \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')} \right) \\
&= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} \cdot \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')} \\
&= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')} + \frac{\gamma'^2 \gamma''^2 \left(\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' \right) \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}''}{(1 + \gamma')(1 + \gamma'')} .
\end{aligned}$$

Et donc

$$\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' + C' C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')} + \left(\frac{\gamma'^2 \gamma''^2 \left(\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' \right)}{(1 + \gamma')(1 + \gamma'')} + \gamma' \gamma'' \right) \left(\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' \right)$$

De même si on calcule $M = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}')$:

$$\gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}' + C'' C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')} + \left(\frac{\gamma'^2 \gamma''^2 \left(\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' \right)}{(1 + \gamma')(1 + \gamma'')} + \gamma' \gamma'' \right) \left(\vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}' \right)$$

puisque $\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' = \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}'$.

Or

$$\left(\frac{\gamma'^2 \gamma''^2 \left(\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' \right)}{(1 + \gamma')(1 + \gamma'')} + \gamma' \gamma'' \right) = \gamma' \gamma'' \left(1 + \frac{\gamma' \gamma'' \left(\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' \right)}{(1 + \gamma')(1 + \gamma'')} \right) > 0$$

puisque $\gamma' \geq 1$, $\gamma'' \geq 1$ et $\left| \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' \right| < 1$.

Donc $\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' = \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}' \Rightarrow \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}'' \cdot \vec{e}_i = \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}' \cdot \vec{e}_i = \vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}''_i = \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}'_i$ pour $\vec{e}_i = \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Comme $\vec{\beta}'' \neq \vec{0}$ il existe i tel que $\beta''_i \neq 0$ et donc $\vec{\beta}' = \left(\frac{\beta'_i}{\beta''_i} \right) \vec{\beta}''$.

Comme $\vec{\beta}'$ et $\vec{\beta}''$ sont colinéaires, en appliquant la première partie du théorème le produit :

$M = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}')$ est une matrice symétrique donc sans rotation.

Théorème 2 :

Si la partie symétrique et la partie orthogonale commutent alors $\vec{\beta}$ est colinéaire à l'axe de rotation de la partie orthogonale.

Démonstration :

Si $\Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Omega = \Omega \cdot \Lambda(\vec{\beta})$ comme $\Omega \cdot \Lambda(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\Omega\beta}) \cdot \Omega$ par unicité de la décomposition on a

$${}^t\vec{\Omega}\vec{\beta} = \vec{\beta}.$$

Remarques :

(1) Considérons le cas où les observateurs O, O', O''

'sont alignés et que les 3 bases associées sont "parallèles"

et telles que le premier axe de chacune d'elles soit aligné avec $\vec{\beta}$:

On a pour les matrices de changement de base les relations :

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta' & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \beta' & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma'' \cdot \beta'' & 0 & 0 \\ \gamma'' \cdot \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \cdot \gamma'' (1 + \beta' \cdot \beta'') & \gamma \cdot \gamma'' (\beta'' + \beta') & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \gamma'' (\beta'' + \beta') & \gamma \cdot \gamma'' (1 + \beta' \cdot \beta'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma'' \cdot \beta'' & 0 & 0 \\ \gamma'' \cdot \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta' & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \beta' & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On voit directement qu'il y a commutativité dans la composition des mouvements.

(2) Même cas mais sans alignement du premier axe sur $\vec{\beta}$:

Les matrices de changement de base sont 2 matrices de Lorentz sans rotation $\Lambda(\vec{\beta}')$ et $\Lambda(\vec{\beta}'')$.

Puisque les 3 bases sont "parallèles" on peut écrire :

$$\Lambda(\vec{\beta}').\Lambda(\vec{\beta}'') = P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}') {}^tP \cdot P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}'') \cdot {}^tP \text{ où :}$$

$$\Lambda_0(\vec{\beta}') = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta' & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \beta' & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda_0(\vec{\beta}'') = \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma'' \cdot \beta'' & 0 & 0 \\ \gamma'' \cdot \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P \text{ une matrice orthogonale.}$$

Alors :

$$\Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}') \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}'') \cdot {}^tP = P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}') \cdot {}^tP \\ = P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}'') {}^tP \cdot P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}') \cdot {}^tP = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}')$$

Il y a donc commutativité dans la composition des mouvements .

Bibliographie :

- Annequin et Boutigny . "Mécanique relativiste ,Exercices ". *Vuibert* 1978.
R.G. Bartle . " Modern theory of integration ". *AMS* 2001.
Berkeley(*Cours de Physique vol 1*) . "Mécanique". *Armand Colin* 1972.
P • Boyer . "Algèbre et Géométries " . *C&M* 2015 .
P • Brousse • *Mécanique* • *Armand Colin* 1968 .
J. Dieudonné . "Eléments d'analyse " . *Gauthier — villars* 1969 .
F • R • *Gantmacher* . "Théorie des matrices " • *Edition J • Gabay* 1990.
R. Goblots . "Algèbre linéaire " *Masson* 1995 .
E. Gourgoulhon . "Relativité restreinte" • *EDP Sciences* 2010 .
J. Grifone . "Algèbre Linéaire" • *Cepadues éditions* 2002 .
J — B . Hiriart - Urruty, Y. Plusquellec . "Exercices Algèbre linéaire". *Cepadues éditions* 1988 .
D. Langlois . "Introduction à la relativité" • *Vuibert* 2011.
J • M Lévy — Leblond • *One more derivation of the Lorentz transformation*.
American Journal of Physics, vol 44, n ° 3, March 1976 p271 — 277
J.R. Lucas , P.E. Hodgson "Spacetime and electromagnetism " . *Clarenton Press* 1990 .
R. Mneimé , F. Testard . "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " . *Hermann Paris* 1986 .
J-M. Monier . "Algèbre 1 et 2". *Dunod* 1997 .
J.Ph. Pérez . " Relativité et invariance " *Dunod* 2011.
W. Rudin . "Analyse réelle et complexe " . *Masson* 1978 .
C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". *Dunod* 2010.
J-M. Souriau . "Calcul Linéaire " . *PUF* 1964 .
N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " . *Springer* 2002 .

Travaux préparatoires :

- https://archive.org/details/version-1_a_202006/mode/2-up
<https://archive.org/details/matricesdelorentz>
https://archive.org/details/p_20220209_202202/mode/2-up
<https://archive.org/details/une-nouvelle-approche-axiomatique-de-la-theorie-de-la-relativite-restreinte-docu/mode/2-up>
<https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02965773/document>

